فصل دوم

عددهای حقیقی

۱.۲ عددهای گویا

عددهای گویا: هر عددی که به کسر تبدیل شود، عدد گویا نام دارد. (صورت و مخرج باید عدد صحیح باشند و مخرج باید مخالف صفر باشد.)

نکته: اعداد گویا را با حرف $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z}, b\neq ۰\right\}$

جمع و تفریق اعداد گویا: مخرج مشترک گرفته که بهترین مخرج مشترک، کوچکترین مضرب مشترک (ک. م. م) می‌باشد.

مثال : $\left(-\frac{۵}{۱۲}\right)-\left(-\frac{۷}{۱۸}\right)=\left(-\frac{۵}{۱۲}\right)+\left(+\frac{۷}{۱۸}\right)=\frac{-۱۵+۱۴}{۳۶}=\frac{-۱}{۳۶}$

مضرب‌های ۱۲ : $۱۲,۲۴,۳۶,۴۸,\ldots$

$\longrightarrow$ ک. م. م ۱۲,۱۸ $=۳۶$

مضرب‌های ۱۸ : $۱۸,۳۶,۵۴,۷۲,\ldots$

ضرب اعداد گویا: فقط در ضرب می‌توان قبل از جواب دادن صورت را با مخرج ساده کرد. سپس صورت‌ها را در هم و مخرج‌ها را نیز در هم ضرب می‌کنیم.

مثال : $\left(-\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{3}}\right) \times \left(-\frac{\cancel{3}}{\cancel{10}_{2}}\right) = +\frac{1}{2}$

تقسیم اعداد گویا: کسر اول را نوشته، تقسیم را تبدیل به ضرب و کسر دوم را معکوس می‌کنیم.

مثال : $\left(+\frac{4}{7}\right) \div \left(-\frac{5}{21}\right) = \left(+\frac{4}{\cancel{7}_{1}}\right) \times \left(-\frac{\cancel{21}^{3}}{5}\right) = -\frac{12}{5}$

مثال: حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \div \left[\left(-\frac{1}{15}\right) + \left(+\frac{3}{5}\right)\right] = \left(-\frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{-1+9}{15}\right) = \left(-\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}_{1}}\right) \times \left(\frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{8}_{4}}\right) = -\frac{5}{4}$$

مقایسه اعداد گویا: از دو روش می‌توان استفاده کرد:

الف) هم مخرج کردن کسرها: ابتدا مخرج تمام کسرها را برابر کرده و سپس کسرها را مقایسه می‌کنیم.

مثال: اعداد گویای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$\frac{7}{10}$ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ و $\frac{2}{5}$

$\frac{7}{10} = \frac{14}{20}$ و $\frac{1}{2} = \frac{10}{20}$ و $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ و $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ $\longrightarrow \frac{8}{20} < \frac{10}{20} < \frac{14}{20} < \frac{15}{20} \longrightarrow \boxed{\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}}$

ب) تبدیل به اعشار: صورت را بر مخرج تقسیم و خارج قسمت را تا دو رقم اعشار ادامه می‌دهیم.

مثال: اعداد گویای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$\frac{7}{10}$ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ و $\frac{2}{5}$

$\frac{7}{10} = 0.70$ و $\frac{1}{2} = 0.50$ و $\frac{3}{4} = 0.75$ و $\frac{2}{5} = 0.40$ $\longrightarrow 0.40 < 0.50 < 0.70 < 0.75 \longrightarrow \boxed{\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}}$

نکته: بین دو عدد گویا، بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد.

پیدا کردن کسرهایی بین دو عدد گویا (کسری): چند روش وجود دارد که دو روش کاربردی به صورت زیر است:

روش اول: صورت‌ها را با هم مخرج و مخرج‌ها را نیز با هم جمع می‌کنیم.

مثال: بین $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ دو عدد گویا بنویسید.

$$\frac{۳}{۴} = ۰٫۷۵ \quad \text{و} \quad \frac{۴}{۵} = ۰٫۸۰$$

$$\frac{۳}{۴} < \frac{۳+۴}{۴+۵} < \frac{۴}{۵} \longrightarrow \frac{۳}{۴} < \frac{۷}{۹} < \frac{۷+۴}{۹+۵} < \frac{۴}{۵} \longrightarrow \boxed{\frac{۳}{۴} < \frac{۷}{۹} < \frac{۱۱}{۱۴} < \frac{۴}{۵}}$$

روش دوم: ابتدا مخرج مشترک گرفته، سپس صورت و مخرج را در یک واحد بیشتر از تعداد خواسته شده ضرب می‌کنیم.

مثال: بین $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ دو عدد گویا بنویسید.

$$\frac{۳_{\times ۵}}{۴_{\times ۵}} = \frac{۱۵}{۲۰} \quad \text{و} \quad \frac{۴_{\times ۴}}{۵_{\times ۴}} = \frac{۱۶}{۲۰} \longrightarrow \frac{۱۵_{\times ۳}}{۲۰_{\times ۳}} = \frac{۴۵}{۶۰} \quad \text{و} \quad \frac{۱۶_{\times ۳}}{۲۰_{\times ۳}} = \frac{۴۸}{۶۰} \longrightarrow \boxed{\frac{۴۵}{۶۰} < \frac{۴۶}{۶۰} < \frac{۴۷}{۶۰} < \frac{۴۸}{۶۰}}$$

انواع عددهای اعشاری:

الف) عدد اعشاری متناهی یا مختوم: اگر باقیمانده صورت بر مخرج کسر صفر شود، آن عدد کسری مختوم نام دارد.

مثال:

$$\begin{array}{r|l} ۳/۰ & ۴ \\ \cline{2-2} -۲۸ & ۰/۷۵ \\ \cline{1-1} ۲۰ & \\ -۲۰ & \\ \cline{1-1} ۰ & \end{array}$$

$$\frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر یکی از عامل‌های ۲ یا ۵ وجود داشته باشد، آن کسر مختوم است.

مثال: $\frac{۳}{۲۰} \longrightarrow ۲۰ = ۲^{۲} \times ۵$ و $\frac{۵}{۸} \longrightarrow ۸ = ۲^{۳}$

ب) عدد اعشاری متناوب ساده: اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر، در خارج‌قسمت عددی مرتب تکرار شود، آن عدد را متناوب ساده می‌گویند.

مثال:

$$\begin{array}{r|l} ۱/۰ & ۳ \\ \cline{2-2} -۹ & ۰/۳۳۳\ldots \\ \cline{1-1} ۱/۰ & \\ -۹ & \\ \cline{1-1} ۱/۰ & \\ -۹ & \\ \cline{1-1} ۱ & \\ \vdots & \end{array}$$

$$\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳\ldots = ۰/\overline{۳}$$

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر، عامل ۲ و ۵ نباشند، آن کسر متناوب ساده است.

مثال: $\frac{۳}{۷۷} \longrightarrow ۷۷ = ۷ \times ۱۱$ و $\frac{۵}{۳۹} \longrightarrow ۳۹ = ۳ \times ۱۳$

عدد اعشاری متناوب مرکب: اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر، در خارج‌قسمت بعد از یک یا چند رقم اعشار به رقم‌های تکراری برسیم،به آن کسر متناوب مرکب می‌گویند.

مثال:

$$\begin{array}{r|l} ۵/۰ & ۶ \\ \cline{2-2} -۴۸ & ۰/۸۳۳\ldots \\ \hline ۲/۰ & \\ -۱۸ & \\ \hline ۲/۰ & \\ -۱۸ & \\ \hline ۲ & \\ \vdots & \end{array}$$

$$\frac{۵}{۶} = ۰/۸۳۳۳۳\ldots = ۰/۸\overline{۳}$$

$$\begin{array}{r|l} ۷/۰ & ۲۲ \\ \cline{2-2} -۶۶ & ۳/۱۸\ldots \\ \hline ۴/۰ & \\ -۲۲ & \\ \hline ۱۸/۰ & \\ -۱۷۶ & \\ \hline ۴/۰ & \\ \vdots & \end{array}$$

$$\frac{۷}{۲۲} = ۰/۳۱۸۱۸۱۸\ldots = ۰/۳\overline{۱۸}$$

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر، به جز ۲ و ۵ عامل‌های دیگری نیز وجود داشته باشد، آن کسر متناوب مرکب است.

مثال: $\frac{۳}{۷۵} \longrightarrow ۷۵ = ۳ \times ۵^{۲}$ و $\frac{۵}{۱۴} \longrightarrow ۱۴ = ۲ \times ۷$

۲.۲ عددهای حقیقی

اعداد گنگ (اصم): اعدادی که تعداد ارقام اعشاری آن‌ها بی‌شمار و دارای دوره‌ی تناوب نیستند، گنگ (اصم) می‌گوییم. مجموعه‌ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می‌نامیم و آن را با $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Q}'$ نمایش می‌دهیم. مانند $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۱۰}$، π و $۰٫۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱\ldots$.

نکته: اگر n مربع کامل نباشد، آن‌گاه $\sqrt{n}$ عددی گنگ است (یعنی اعدادی که جذر دقیق ندارند، گنگ هستند).

نکته: عدد π چون دارای دوره‌ی تناوب نیست، عددی گنگ است.

$$\pi \simeq ۳٫۱۴۱۵۹۲۲۶۵۳\ldots$$

مثال: در جاهای خالی علامت $\in$ یا $\notin$ قرار دهید.

$$\sqrt{۴۷}\ \boxed{\in}\ \mathbb{Q}' \qquad \sqrt{۰٫۳۶}\ \boxed{\notin}\ \mathbb{Q}' \qquad -\frac{۲}{۵}\ \boxed{\notin}\ \mathbb{Q}'$$

$$۱-\sqrt{۲}\ \boxed{\notin}\ \mathbb{Q} \qquad ۳٫۱۴\ \boxed{\notin}\ \mathbb{Q}' \qquad \pi\ \boxed{\in}\ \mathbb{Q}'$$

مثال: بین دو عدد داده شده سه عدد گنگ بنویسید.

الف) $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$

$$\sqrt{۲} < \boxed{\sqrt{۲٫۱}} < \boxed{\sqrt{۲٫۲}} < \boxed{\sqrt{۲٫۳}} < \sqrt{۳}$$

ب) ۲ و ۳

$$۲ = \sqrt{۴} < \boxed{\sqrt{۵}} < \boxed{\sqrt{۶}} < \boxed{\sqrt{۷}} < \sqrt{۹} = ۳$$

نکته: بین دو عدد گنگ، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد.

نکته: بین دو عدد گویا، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد.

مثال: عدد $\sqrt{۱۰}+۳$ بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد.

$$\sqrt{۹}<\sqrt{۱۰}<\sqrt{۱۶} \longrightarrow ۳<\sqrt{۱۰}<۴ \longrightarrow ۳+۳<۳+\sqrt{۱۰}<۴+۳ \longrightarrow \boxed{۶<۳+\sqrt{۱۰}<۷}$$

بنابراین $\sqrt{۱۰}+۳$ بین ۶ و ۷ قرار دارد.

اعداد حقیقی: اجتماع مجموعه اعداد گویا و عددهای گنگ را مجموعه عددهای حقیقی می‌نامیم و آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. داریم: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

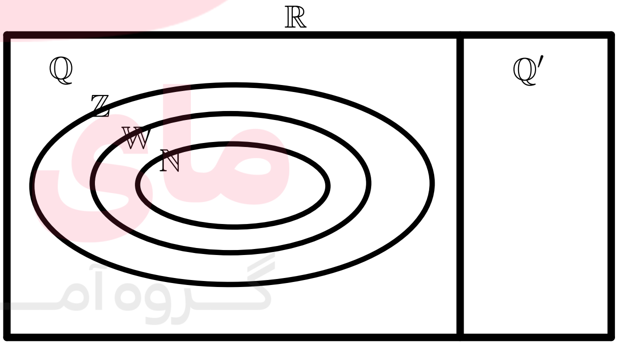
نکته:

$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$

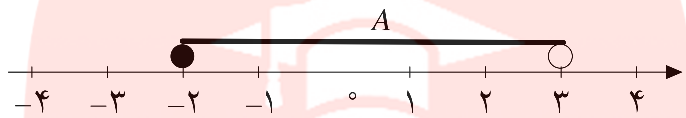
$\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\emptyset$



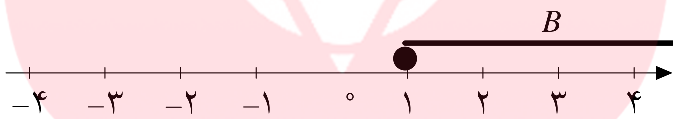
نکته: چون اعداد حقیقی شامل اعداد گویا و گنگ هستند، پس نمایش این اعداد به صورت خط ممتدی است. (اگر علامت نامساوی سرکش داشته باشد، دایره توپر و اگر سرکش نداشته باشد، دایره توخالی قرار می‌دهیم).

مثال: مجموعه اعداد زیر را روی محور نشان دهید.

الف) $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۲\le x\le ۳\}$



ب) $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge ۱\}$



۲.۳ قدرمطلق و محاسبه‌ی تقریبی

قدرمطلق: فاصله‌ی نقطه‌ی نمایش عدد a را از مبدأ، قدر مطلق a می‌نامیم و با علامت $|a|$ (بخوانید قدرمطلق a) نمایش می‌دهیم.

مثال: $|-\frac{۴}{۳}| = \frac{۴}{۳}$ $\quad |۵| = ۵$ $\quad |-۲| = ۲$

$|۰| = ۰$ $\quad |-\sqrt{۵}| = \sqrt{۵}$ $\quad |-\pi| = \pi$

خواص قدر مطلق:

۱. قدر مطلق عدد صفر، برابر با صفر است. $a = ۰ \Rightarrow |a| = ۰$

۲. قدر مطلق عددهای مثبت برابر با خود آن عدد است. $a > ۰ \Rightarrow |a| = a$

۳. قدر مطلق عددهای منفی برابر با قرینه آن عدد است. $a < ۰ \Rightarrow |a| = -a$

نکته: به طور کلی قدرمطلق هر عدد (به جز صفر)، عددی مثبت می‌شود.

مثال: عبارت‌های زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

$$|۲۰ - ۴۰ + ۱۵| = |-۲۰ + ۱۵| = |-۵| = ۵$$

$$|(-۷) \times (+۸)| = |-۵۶| = ۵۶$$

$$|۴ - ۶ \times ۴ \div ۳ + ۲| = |۴ - ۲۴ \div ۳ + ۲| = |۴ - ۸ + ۲| = |-۴ + ۲| = |-۲| = ۲$$

نکته: مقدار تقریبی برخی از اعداد تا یک رقم اعشار به صورت زیر است:

$$\sqrt{۲} \simeq ۱/۴ \qquad \sqrt{۳} \simeq ۱/۷ \qquad \sqrt{۵} \simeq ۲/۲ \qquad \sqrt{۶} \simeq ۲/۴ \qquad \sqrt{۷} \simeq ۲/۶ \qquad \sqrt{۸} \simeq ۲/۸$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$$|\underbrace{۱-\sqrt{۲}}_{\text{منفی}}| = -(۱-\sqrt{۲}) = -۱+\sqrt{۲} = \sqrt{۲}-۱$$

$$|\underbrace{۲-\sqrt{۳}}_{\text{مثبت}}| = ۲-\sqrt{۳}$$

$$|\underbrace{۲\sqrt{۵}-\sqrt{۵}}_{\text{مثبت}}| = ۲\sqrt{۵}-\sqrt{۵}$$

$$|\underbrace{۳-\sqrt{۵}}_{\text{مثبت}}| + |\underbrace{-۲-\sqrt{۵}}_{\text{منفی}}| = ۳-\sqrt{۵}+-(-۲-\sqrt{۵}) = ۳-\sqrt{۵}+(+۲+\sqrt{۵}) = ۳-\sqrt{۵}+۲+\sqrt{۵} = ۵$$

نکته: اگر a عددی حقیقی باشد، آنگاه داریم: $\sqrt{a^۲} = |a|$

مثال:

$$\sqrt{(-۷)^۲} = |-۷| = ۷$$

$$\sqrt{۹^۲} = |۹| = ۹$$

$$\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^۲} = |\underbrace{۱-\sqrt{۳}}_{\text{منفی}}| = -(۱-\sqrt{۳}) = -۱+\sqrt{۳}$$